CONCOURS COMMUN I.N.A. E.N.S.A. 1979

MATHÉMATIQUES

(Option générale)

DEUXIÈME COMPOSITION

DURÉE : 3 heures

Dans tout le problème, $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des matrices carrées à coefficients réels, de dimension quelconque. On désigne par $\mathcal{E}_n$ le sous-ensemble de $\mathcal{E}$ formé par les matrices de dimension n. Pour $M \in \mathcal{E}$, on note $d(M)$ la dimension de la matrice carrée M.

A toute matrice M, $M \in \mathcal{E}$, on associe l'endomorphisme f_M,

$$f_M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{d(M)}, \mathbb{R}^{d(M)})$$

dont la représentation dans la base canonique de $\mathbb{R}^{d(M)}$ est la matrice M.

PARTIE I

1° Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Montrer que la famille

$$\mathcal{B}^2 = \{(e_1, 0) ; (e_2, 0) ; \ldots ; (e_n, 0) ; (0, e_1) ; \ldots ; (0, e_n)\}$$

forme une base de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, lorsque celui-ci est muni d'une structure d'espace vectoriel par des lois que l'on précisera.

2° Soit $M \in \mathcal{E}_n$ et f_M l'application associée dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

A l'application f_M on associe f'_M, application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans lui-même, définie par :

$$f'_M(x, y) = (f_M(x), f_M(y)).$$

Montrer que $f'_M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, et décrire sa matrice relativement à la base $\mathcal{B}^2$ à l'aide des coefficients m_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ de la matrice M.

3° La matrice de f'_M relativement à $\mathcal{B}^2$ ne dépend que de M et sera notée $\varphi(M)$ dans toute la suite. Ceci détermine donc une application φ de $\mathcal{E}$ dans lui-même, que l'on demande de décrire. En particulier, que vaut $d[\varphi(M)]$?

4° Montrer que pour M et N telles que $d(M) = d(N)$, l'on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \mu \in \mathbb{R},\quad f'_{\lambda M + \mu N} = \lambda f'_M + \mu f'_N$$

et :

$$f'_{M \cdot N} = f'_M \circ f'_N.$$

En déduire que :

$$\varphi(\lambda M + \mu N) = \lambda \varphi(M) + \mu \varphi(N)$$

et que :

$$\varphi(M \cdot N) = \varphi(M) \cdot \varphi(N).$$

5° Que peut-on dire de $\varphi(M)$ si M est symétrique?

6° Soit $M \in \mathcal{E}_n$ et f_M l'application linéaire associée, et soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Donner une condition nécessaire et suffisante simple portant sur M pour que f_M admette $x = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$ pour vecteur propre.

Lorsque cette condition est remplie, on note S(M) la valeur propre associée à x.

On note $\overline{\mathcal{E}}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}$ vérifiant la condition précédente. Montrer que si $M \in \overline{\mathcal{E}}$, alors $\varphi(M) \in \overline{\mathcal{E}}$. Comparer S(M) et S[$\varphi$(M)].

7° Soit $J \in \mathcal{E}$ une matrice dont tous les éléments sont égaux à 1.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \ldots 1 \\ 1 & \ldots\ 1 \\ \ldots & \\ 1 & \ldots\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit $M \in \overline{\mathcal{E}}$ telle que $d(M) = d(J)$. Calculer MJ.

Si M est en outre symétrique, calculer JM.

PARTIE II

On note J_n la matrice de dimension n dont tous les éléments sont égaux à 1 (n entier strictement positif).

Pour $q \in \mathbb{N}$, et $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant q$, on définit la matrice

$$A_{q,k} = \varphi^{q-k}(J_{(2^k)})$$

où φ^0 désigne l'application identique de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$, et où l'on note

$$2^0 = 1, \quad \text{et} \quad \varphi^h = \underbrace{(\varphi \circ \varphi \circ \ldots \circ \varphi)}_{h \text{ fois}}$$

.../...

1° Écrire explicitement les matrices $A_{q,k}$ pour $q = 0, 1, 2$.

2° Calculer $d(A_{q,k})$; calculer $A_{q,0}$ et $A_{q,q}$.

3° Montrer que $\forall q, \forall k, A_{q,k} \in \overline{\mathcal{E}}$ (on utilisera I, 6°) et donner la valeur de $S(A_{q,k})$.

Montrer que $A_{q,k}$ est symétrique.

4° Montrer que, si $k \geqslant k'$,

$$A_{q,k'} \cdot A_{q,k} = A_{q,k} \cdot A_{q,k'} = 2^{k'} \cdot A_{q,k}$$

(on utilisera la plupart des résultats de I, 4° à I, 7°, en commençant par I, 4°).

5° En déduire que le sous-espace vectoriel $\mathcal{H}_q$ engendré dans $\mathcal{E}_{(2^q)}$ par la famille $\{A_{q,0}; A_{q,1}; \ldots; A_{q,q}\}$ est une algèbre incluse à $\mathcal{E}_{(2^q)}$.

PARTIE III

Dans cette partie, on pose $q = 3$ et on notera :

$$H_0 = A_{3,0} \; ; \quad H_1 = A_{3,1} \; ; \quad H_2 = A_{3,2} \; ; \quad H_3 = A_{3,3} .$$

1° Montrer que les quatre matrices H_i sont linéairement indépendantes dans $\mathcal{E}_8$, et dresser leur table de multiplication.

2° Soient M, X deux éléments de $\mathcal{H}_3$. On notera :

$$M = \sum_{k=0}^{3} \lambda_i H_i \qquad X = \sum_{k=0}^{3} x_i H_i .$$

Calculer les coordonnées de MX sur la base $\{H_0 H_1 H_2 H_3\}$.

3° On désigne par I la matrice unité de $\mathcal{E}_8$, montrer que l'équation MX = I, où X est l'inconnue, admet une solution dans $\mathcal{H}_3$ si et seulement si le produit :

$$\lambda_0 (\lambda_0 + 2\lambda_1) (\lambda_0 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2) (\lambda_0 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 8\lambda_3)$$

n'est pas nul.

4° Montrer que si l'un des facteurs du produit précédent est nul, l'équation MX = 0 admet des solutions dans $\mathcal{H}_3$.

5° Calculer l'inverse de la matrice :

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail